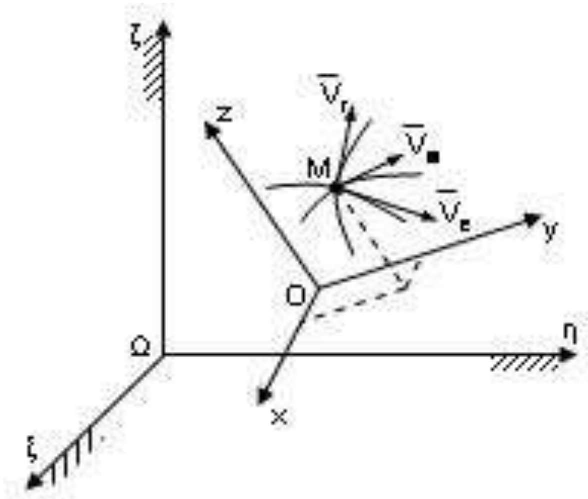
2.4. Нүктенің күрделі қозғалысы
2.4.1. Салыстырмалы, тасымал және абсолют қозғалыстары

Кейде берілген *M* нүктесінің қозғалысын бір мезгілде екі координаттар жүйесінің бір мезгілде екі координаттар жүйесіне қатысты қарастыру керек. Осы екі жүйенің бірін $\Omega\xi\eta\zeta$-деп белгілеп, оны шартты түрде қозғалмайтын (немесе негізгі) деп ұйғарайық. Екінші координаттар жүйесі *Oxyz* , негізгі жүйеге қарағанда кез келген түрдегі қозғалыс жасайтын болсын. Ал берілген нүкте *M* қозғалмалы жүйеге қарағанда өзі де қозғалыс жасайды және оның бұл қозғалысы *Oxyz* жүйе қозғалысына тәуелсіз болып келеді дейік (2.29- сурет).



2.29-сурет

Негізгі $\Omega\xi\eta\zeta$-ға қатысты нүктенің қозғалысын шартты түрде, абсолют (күрделі) қозғалыс деп атаймыз. Оның абсолют жылдамдығын $\bar{v}_a$, үдеуін $\bar{a}_a$ деп белгілейміз.

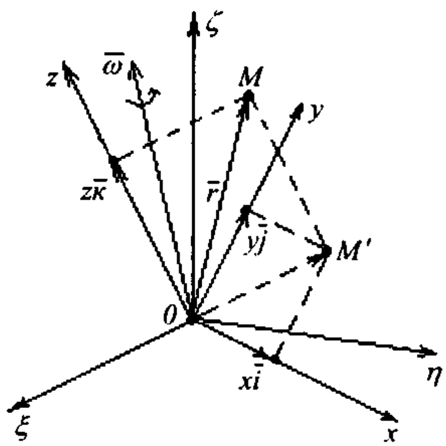
M-нүктесінің қозғалмалы *Oxyz* жүйесіне қатысты қозғалысы салыстырмалы қозғалыс ретінде алынады.

Салыстырмалы қозғалыс жылдамдығы $\bar{v}_r$, салыстырмалы үдеу $\bar{a}_r$ - деп белгілінеді.

Қозғалушы *M* нүктенің жылжымалы жүйе *Oxyz*-ке ілесе қозғалуы, оның тасымал қозғалысы ретінде алынады. Тасымал қозғалыс жылдамдығы $\bar{v}_e$, тасымал үдеу $\bar{a}_e$-деп белгіленеді.

2.4.2 Қозғалмалы координаттар өстеріндегі өзінің құраушылары арқылы берілген вектордың абсолют және салыстырмалы туындылары

Нүктенің күрделі қозғалысын әрі қарай қарастыру кезінде кез келген қозғалыстағы координаттар жүйесіне байланысты анықталған вектордан уақыт бойынша туынды алу мәселесі келіп туындайды. Міне, осыған байланысты вектордың абсолют және салыстырмалы туындылары деген ұғымдарды пайдалануымыз қажет болады. Осы ұғымдардың тиісті анықтамаларына тоқтап, одан соң вектордың абсолюттік туындысы мен салыстырмалы туындылары арсындағы байланыстарды табуымыз керек. Ол үшін қозғалмайтын координаттар жүйесі $O\xi\eta\zeta$ мен қатар, лездік бұрыштық жылдамдығы $\bar{\omega}$-ға тең сфералық қозғалыс жасайтын $Oxyz$ қозғалмалы координаттар жүйесі берілген дейік (2.30-сурет). Олардың бас нүктелері полюс O –да жататын болсын.



2.31-сурет

Қандайда уақыт t –ға тәуелді өзгеретін вектор $\overline{a} = \overline{a}(t)$, Қозғалмалы координаттар жүйесіне қатысты алынған вектор болсын, яғни оның осы санақ жүйесінің өстеріндегі проекциялары белгілі уақыт функциялары болып келген дейік Демек, бұл вектор өзінің қозғалмалы өстердегі проекциялары арқылы жіктелген:

$$\overline{a}(t) = a_x(t)\overline{i} + a_y(t)\overline{j} + a_z(t)\overline{k}\,. \tag{2.108}$$

мұндағы $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ – векторларын тұрақты деп алынған сәттегі (2.108)-теңдікпен берілген. $\overline{a}$ векторынан уақыт бойынша алынған туындыны, *вектордың салыстырмалы туындысы* дейміз.

Салыстырмалы туындыны $\dfrac{\tilde{d}}{dt}$ символымен белгілейміз. Сонда бұл анықтаманы өрнектейтін мынадай теңдік аламыз:

$$\frac{\tilde{d}\overline{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt}\overline{i} + \frac{da_y}{dt}\overline{j} + \frac{da_z}{dt}\overline{k}\,. \tag{2.109}$$

Бұл формула $\overline{a} = \overline{a}(t)$ векторының $Oxyz$ қозғалмалы координаттар жүйесіне қатысты өзгеру тездігін (жылдамдығын) көрсетеді. Осы формуладан вектордың өзегеру тездігі оның қозғалмалы өстердегі проекцияларының өзгеруіне тәуелді болып келетінін байқаймыз.

(2.108)-теңдіктің екі жағынан (2.109)-теңдікті ескере отырып уақыт бойынша толық туынды аламыз:

$$\frac{d\overline{a}}{dt} = \frac{\tilde{d}\overline{a}}{dt} + a_x\frac{d\overline{i}}{dt} + a_y\frac{d\overline{j}}{dt} + a_z\frac{d\overline{k}}{dt}\,. \tag{2.110}$$

мұндағы бірлік векторлардан уақыт бойынша алынған туындыларды, қатты дене кинематикасында анықталған Эйлер формуласының көмегімен түрлендіреміз:

$$\frac{d\overline{i}}{dt} = \overline{\omega}\times\overline{i},\quad \frac{d\overline{j}}{dt} = \overline{\omega}\times\overline{j},\quad \frac{d\overline{k}}{dt} = \overline{\omega}\times\overline{k}. \tag{2.111}$$

(2.111) теңдіктерден (2.110) теңдігіндегі орындарына қоямыз:

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = \frac{\tilde{d}\bar{a}}{dt} + a_x\bar{\omega}\times\bar{i} + a_y\bar{\omega}\times\bar{j} + a_z\bar{\omega}\times\bar{k} =$$

$$\frac{\tilde{d}\bar{a}}{dt} + \bar{\omega}\times(a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}) = \frac{\tilde{d}\bar{a}}{dt} + \bar{\omega}\times\bar{r}.$$

Сонымен, соңғы теңдіктен вектордың абсолюттік (толық) туындысы мен салыстырмалы (локальды) туындысын байланыстыратын мынадай формула аламыз:

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = \frac{\tilde{d}\,\bar{a}}{dt} + \bar{\omega}\times\bar{r}\,. \qquad (2.112)$$

(2.112)- формуланы кинематиканың, вектордың салытырмалы туындысы жөніндегі, леммасы деп атайық. Мұндағы $\tilde{d}\,\bar{a}/dt$ вектор $\bar{a}-$ның салыстырмалы туындысы, ал $\bar{\omega}-$қозғалмалы координаттар жүйесі $Oxyz-$тің полюс O нүктесі арқылы өтетін өстен айналуының бұрыштық жылдамдығы. Осы айтылғандарды пайдалана отырып (2.112) формуласын мынадай лемма түрінде айта аламыз.

Лемма. Вектордың уақыт бойынша алынған абсолют туындысы сол вектордың салыстырмалы туындысына бұрыштық жылдамдық векторымен вектордың өзін векторлық түрде көбейтіп алып қосқанда шығатын векторға тең (2.112).

Осы тақырып соңында мынадай ескерту айтамыз. Кинематиканың салыстырмалы туынды туралы леммасы (2.108)-теңдік түріндегі жіктелуімен берілген векторлар үшін қолданылады. Салыстырмалы туынды ұғымы тек осындай векторларға арналған.

2.4.2. Жылдамдықтарды қосу туралы теорема

Бізге күрделі қозғалыстағы M нүктесі берілсін. Осының алдында айтқанымыздай бұл нүктенің қозғалмайтын жүйеге қарағандағы орны $\bar{\rho}$-радиус-векторымен, ал қозғалмалы жүйеге қарағанда $\bar{r}$-радиус-векторымен анықталып отыратын болсын. Сонда:

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_0 + \bar{r}\,, \qquad (2.113)$$

мұндағы $\bar{\rho}_0$ полюс үшін алынған O нүктесінің радиус векторы.

Анықтама бойынша нүктенің абсолют жылдамдығы $\bar{v}_a$, оның радиус векторынан уақыт бойынша алынған абсолют туындысына тең:

$$\bar{v}_a = \frac{d\bar{\rho}}{dt}, \quad \bar{v}_a = \frac{d\bar{\rho}_0}{dt} + \frac{d\bar{r}}{dt} \tag{2.114}$$

мұндағы бірінші қосылғыш O –полюстің абсолют жылдамдығын,

$$\bar{v}_0 = \frac{d\bar{\rho}_0}{dt} \tag{2.115}$$

береді, ал екінші қосылғыш нүктенің полюске қатысты радиус–векторының абсолют туындысын өрнектейді.

Сондықтан:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \overline{\frac{dr}{dt}} + \bar{\omega} \times \bar{r}, \tag{2.116}$$

мұндағы ω-қозғалмалы $Oxyz$ санақ жүйесінің бұрыштық жылдамдығы. Салыстырмалы туынды:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k} = \bar{v}_r. \tag{2.117}$$

(2.117) нүктенің салыстырмалы жылдамдығын береді. (2.117) –теңдікті (2.116)–ғы орнына қойсақ мынадай формула шығады:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v}_r + \bar{\omega} \times \bar{r}. \tag{2.118}$$

Енді (2.115) және (2.118) теңдіктері арқылы (2.114) –теңдікті соңғы түріне келтіреміз:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} + \bar{v}_r. \tag{2.119}$$

(2.119)–формула қозғалушы нүкте M-нің абсолют жылдамдығын өрнектейді.

Қозғалушы нүктені қозғалмалы жүйеге ойша бекітілген деп жоримыз, яғни $\bar{v}_r = 0$. Сонда M нүктесі қозғалмалы жүйемен тек тасымалданады. Бұл жағдайда (2.101) –формуладан мынадай формула шығады:

$$\bar{v}_e = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} \tag{2.120}$$

Қозғалушы M–нің абсолют жылдамдығы өрнектейтін (2.120) формуланы ықшамдалған түрге келтіреміз:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_0 + \bar{v}_r \tag{2.121}$$

(2.121)–формула жылдамдықтарды қосу туралы теореманы береді.

Теорема: *нүктенің абсолют жылдамдығы тасымал және салыстырмалы жылдамдықтардың векторлық қосындысына тең болады.*

2.4.3. Үдеулерді қосу туралы теорема (Кориолис теоремасы)

М нүктесінің $\bar{a}_a$ - абсолют үдеуін қарастырайық. Аңықтама бойынша нүктенің абсолют үдеуі абсолют туындығы тең:

$$\bar{a}_a = \frac{d\bar{v}_a}{dt} = \frac{d(\bar{v}_r + \bar{v}_e)}{dt} = \frac{d\bar{v}_r}{dt} + \frac{d\bar{v}_e}{dt}. \qquad (2.122)$$

Тасымал жылдамдық және салыстырмалы жылдамдықтан уақыт бойынша алынған абсолют туындыларды жеке-жеке қарастырайық:

$$\frac{d\bar{v}_e}{dt} = \frac{d\bar{v}_0}{dt} + \frac{d(\bar{\omega} \times \bar{r})}{dt} = \frac{d\bar{v}_0}{dt} + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt}, \qquad (2.123)$$

мұндағы $\bar{r}$ радиус-векторынан уақыт бойынша алынған абсолют туындыны есептеуге мына формуланы қолданамыз:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{\tilde{d}\bar{r}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{r}. \qquad (2.124)$$

Салыстырмалы радиус-вектор $\bar{r}$-дің салыстырмалы туындысы, анықтама бойынша салыстырмалы жылдамдықты береді:

$$\frac{\tilde{d}\bar{r}}{dt} = \bar{v}_r, \qquad (2.125)$$

(2.122) теңдікті ескере отырып, (2.124), (2.125)–теңдіктерді (2.123)–дегі орнына қоямыз. Сонда (2.122)–теңдіктен тасымал жылдамдықтан уақыт бойынша алынған абсолют туындыны өрнектейтін формула аламыз:

$$\frac{d\bar{v}_e}{dt} = \frac{d\bar{v}_O}{dt} + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) + \bar{\omega} \times \bar{v}_r.$$

(2.122)–теңдіктің оң жағындағы екінші қосылғыш вектор салыстырмалы жылдамдықтан уақыт бойынша алынған абсолют туынды. Ал салыстырмалы жылдамдық өзінің қозғалмалы координаттар жүйесі өстеріндегі проекциялары арқылы мына түрде беріледі:

$$\bar{v}_r = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k}.$$

Сондықтан да $d\bar{v}_r/dt$-ны есептеуге өрнектейтін формуланы қолдана аламыз:

$$\frac{d\bar{v}_r}{dt} = \frac{\tilde{d}\bar{r}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{v}_r. \qquad (2.126)$$

(2.125) және (2.126)–теңдіктерді пайдалана отырып, (2.122)–теңдіктен мына түрдегі формулаға келеміз:

$$\bar{a}_a = \frac{d\bar{v}_a}{dt} = \frac{d\bar{v}_0}{dt} + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) + 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r + \frac{\tilde{d}\bar{v}_r}{dt}. \quad (2.127)$$

(2.127)–теңдік іздеп отырған *M* нүктесінің абсолют үдеуінің өрнегін береді. Бұл үдеуді, кейде күрделі қозғалыстағы *M* нүктесінің толық үдеуі деп те атаймыз. (2.127)–теңдіктің оң жағындағы қосылғыштардың кинематикалық мазмұндарын ашайық.

Егер $\bar{\omega} = 0$, $\bar{v}_0 = 0$ болса, онда (2.127)–теңдік осы жағдайда мынадай түрге келеді

$$\bar{a}_r = \frac{\tilde{d}\,\bar{v}_r}{dt} = \frac{\tilde{d}^2\,\bar{r}}{dt^2}. \quad (2.128)$$

Егер $\bar{v}_r = 0, \bar{a}_r = 0$ болса, онда:

$$\bar{a}_e = \bar{a}_0 + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}). \quad (2.129)$$

Соңғы теңдіктегі $\bar{a}_0 = d\bar{v}/dt$ полюс *O*-ның үдеуін белгілейді. (2.129)–теңдік, нүктенің тасымал жылдамдығы $\bar{v}_e$-нің тасымал қозғалыс кезіндегі өзгеру тездігін сипаттайды. Оны тасымал үдеу дейміз.

Зерттеп отырған (2.122)–теңдіктің оң жағында әлі аты аталмаған, екі еселенген векторлық көбейтінді түріндегі бір қосылғыш қалды. Оны $\bar{a}_c$-деп белгілейік:

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_e \times v_r \quad (2.130)$$

(2.130)–формуламен есептелінетін толық үдеудің құраушысын Кориолис деп атайды. Қабыл алынған (2.128), (2.129) (2.130) белгілеулері арқылы (2,122)–теңдікті ықшамдап жазуға болады:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_c. \quad (2.131)$$

(2.131)–теңдікті Кориолистің үдеулерді қосу теоремасы деп атаймыз:

Кориолис теоремасы: *Нүктенің абсолют үдеуі тасымал, салыстырмалы және Кориолис үдеулерінің геометриялық қосындысына тең болады.*

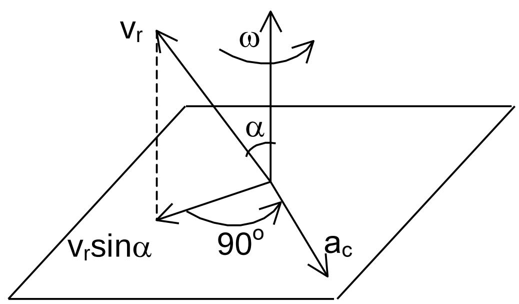
Кориолис үдеуі салыстырмалы қозғалыстағы тасымал, тасымал қозғалыстағы салыстырмалы жылдамдықтың өзгеруін сипаттайды.

Кориолистік үдеудің модулі мен бағыты.

Кориолистік үдеудің модуль шамасы мен бағыты екі вектордың векторлық көбейтіндісі ережесімен анықталады. Үдеудің модулі:

$$\boxed{a_c = 2\cdot|\omega_e \cdot v_r|\cdot sin(\omega_e{}^{\wedge}v_r)},$$

бағыты Н.Е. Жуковский ережесі бойынша анықталады: салыстырмалы жылдамдық векторын тасымал бұрыштық жылдамдық векторына перпендикуляр жазықтыққа проекциялап, одан кейін бұл проекцияны тасымал бұрыштық жылдамдық векторының айналыс бағытындағы 90^o бұрышқа бұрамыз.



Кориолистік үдеудің физикалық мағанасы.

Кориолистік үдеудің шамасы үш жағдайда нөлге тең болатын жағдайлары:

1) ω_e=0 – тасымал қозғалыс ілгерілемелі болғанда;

2) v_r=0 – салыстырмалы қозғалыс жоқ болғанда;

3) $sin(\omega_e{}^{\wedge}v_r)=0$, яғни $\angle(\omega_e{}^{\wedge}v_r)=0$ – нүктенің салыстырмалы қозғалысының жылдамдық векторы қарастырылып отырған жағдайда айналу өсіне параллель болады. Бір жазықтықтағы қозғалыс жағдайында – v_r және ω_e векторларының арасындағы бұрыш 90^o тең болса, $sin90^o=1$, $a_c=2\cdot\omega_e\cdot v_r$.